



Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ ВОСТОЧНО-ЕВРОПЕЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
Пушкинская ул., д. 268, 426008, г. Ижевск. Тел.: (3412) 77-68-24. E-mail: mveu@mveu.ru, www.mveu.ru
ИНН 1831200089. ОГРН 1201800020641

20.02.2026 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению практических работ
при изучении учебной дисциплины
ОП.04 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

по специальности

**09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного
интеллекта**

Практическая работа – небольшой научный отчет, обобщающий проведенную учащимся работу, которую представляют для защиты преподавателю.

В процессе практического занятия учащиеся выполняют одну или несколько практических работ (заданий) под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Государственных требований.

Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Практические занятия проводятся в форме практической подготовки в виде работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

К практическим работам предъявляется ряд требований, основным из которых является полное, исчерпывающее описание всей проделанной работы, позволяющее судить о полученных результатах, степени выполнения заданий и профессиональной подготовке учащихся.

I. Практические работы:

Тема практической работы № 1. Решение линейных уравнений с использованием численных методов, объем часов 1.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - освоение основных численных методов решения линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Развитие практических навыков выбора оптимального метода и оценки точности вычислений.

Задание: решение задач:

Задача № 1. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса-Жордана с точностью до трех знаков после запятой:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Задача № 2. Применяя метод Якоби, найдите приближенное решение системы линейных уравнений с заданной погрешностью $\varepsilon=0.001$:

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = 20 \\ -3x_1 + 10x_2 = 15 \end{cases}$$

Задача № 3. Используя метод простой итерации, вычислите корни следующей системы уравнений с точностью до двух десятичных знаков:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Дополнительное задание. Используйте технологию Python и библиотеку NumPy для проверки найденных корней вышеуказанных систем уравнений.

Методические рекомендации:

Для успешного выполнения заданий рекомендуется изучить теоретический материал лекций по соответствующим разделам численных методов. Особое внимание уделить выбору начального приближения и критерия остановки итерационного процесса. Для повышения эффективности используйте вспомогательные таблицы для записи промежуточных расчетов.

При выполнении дополнительного задания студент должен продемонстрировать умение работать с библиотекой NumPy, применив её для реализации выбранного численного метода и сравнения полученного результата с ручным расчетом.

Студенты обязаны подготовить письменные отчёты по итогам каждого выполненного задания.

Критерии оценки:

Баллы	Критерии оценки
5 («отлично»):	Выполнены все задания верно и аккуратно. Полностью правильно выбран метод решения каждой задачи. Верно произведены расчеты и выполнена проверка правильности решений. Представлен подробный отчет с описанием всех этапов выполнения заданий.- Правильно использованы дополнительные инструменты (например, библиотека NumPy).
4 («хорошо»):	Большинство заданий выполнено верно. Использованы верные подходы и методы, хотя возможны небольшие арифметические ошибки. Отчет составлен достаточно подробно, но допускаются незначительные недостатки оформления. Ошибки в расчетах исправлены самостоятельно либо с небольшой подсказкой преподавателя.
3 («удовлетворительно»):	Часть заданий выполнена неверно или недостаточно точно. Некоторые ошибки в выборе методов или расчете значений. Имеются значительные нарушения в оформлении отчета. Исправления ошибок требуют помощи преподавателя.
2 («неудовлетворительно»):	Большая часть заданий выполнена неправильно. Основные этапы решения выполнены некорректно. Нет понимания используемых методов. Отсутствие пояснительных записей и итогового отчета. Требуется повторное выполнение большинства заданий.

Тема практической работы № 2. Сравнение численных и аналитических решений для простых задач, объем часов 1.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование навыков анализа точности и быстродействия численных и аналитических методов решения прикладных задач, развитие умения интерпретировать полученные результаты и формулировать выводы относительно целесообразности применения тех или иных подходов.

Задания: решение задач:

Задача № 1. Рассчитайте площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2$, осью абсцисс и прямыми $x=0$, $x=2$. Сначала получите точное значение площади аналитически (интегралом), затем решите задачу численно методами прямоугольников и трапеций с шагом сетки $h=0.5$.

Задача № 2. Найдите корни квадратного уравнения $x^2-4x+3=0$ двумя способами: сначала аналитическим способом (формула Виета), затем численным методом Ньютона-Рафсона, начиная с начальных приближений $x_0=0$ и $x_0=5$.

Задача № 3. Проведите сравнение результатов интегрирования функций вида $f(x)=e^{-x}$ на отрезке $[0;1]$ численными методами прямоугольника и аналитической интеграцией. Сделайте вывод о различиях в результатах и причинах возможных расхождений.

Дополнительно. Разработайте программу на Python для автоматического подсчета площадей указанных фигур методом Монте-Карло и сравните полученный результат с аналитическими значениями.

Методические рекомендации:

Рекомендуется предварительно повторить теорию интегрирования и нахождения корней уравнений. Важно соблюдать аккуратность при проведении численных расчётов, учитывая особенности алгоритмов. Для удобства записывайте шаги промежуточных вычислений отдельно для

каждого метода. Обратите особое внимание на сопоставление точности и скорости вычислений разных способов.

Каждый студент обязан представить отчёт по проделанной работе, включающий:

Исходные условия задач.

Подробное описание используемого подхода и методики расчёта.

Таблицы с результатами вычислений.

Выводы о качестве и пригодности использованных методов.

Критерии оценки:

Баллы	Критерии оценки
5 («отлично»):	Все задания выполнены верно и своевременно; Аналитические и численные методы применены корректно, получены точные значения; Чётко сформулированы выводы о достоинствах и недостатках каждого метода; Отчёт представлен грамотно, полно и ясно изложен, представлены все необходимые таблицы и графики (если требуются); Правильно реализован дополнительный пункт.
4 («хорошо»):	Большую часть заданий выполнил верно; Методики применяются адекватно, однако имеются мелкие ошибки в расчётах или небольших нарушениях оформления отчёта; Выводы сделаны чётко, хотя возможно отсутствие детализации некоторых аспектов; Самостоятельно устраняет большинство возникающих вопросов или ошибок.
3 («удовлетворительно»):	Не все задания выполнены корректно; Некоторые части решений содержат существенные ошибки или пропуски; Частично сформирован правильный подход к выводу преимуществ и недостатков рассматриваемых методов; Нуждается в значительной коррекции при подготовке отчёта.
2 («неудовлетворительно»):	Основное количество заданий выполнено с ошибками; Методы используются неверно или нерелевантно задаче;

	Нет ясных выводов по результатам сравнения; Необходимость серьезной доработки материала.
--	---------------------------------------------------------------------------------------------

Тема практической работы № 3. Применение численных методов для решения инженерных задач, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование практических навыков студентов первого курса по применению численных методов для решения типовых инженерных задач.

Задания:

Задание 1. Решите следующую задачу методом левых прямоугольников и оцените относительную ошибку:

Вычислить значение определенного интеграла

$\int_a^b f(x) dx$, где $f(x) = x^2 + 3x$ на интервале $[1;3]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Задание 2. Примените метод трапеций для нахождения значения следующего

интеграла: $\int_0^\pi \sin x dx$. Вычисление провести с использованием пяти равноотстоящих точек. Определите абсолютную погрешность результата.

Задание 3. Используйте метод Симпсона для оценки интеграла:

$\int_{-1}^1 (x^3 + 2x^2 + x) dx$ с пятью узлами сетки. Проверьте полученный результат аналитически.

Дополнительное задание: Напишите программу на Python для автоматического вычисления указанных интегралов различными методами и сравните результаты. Сделайте выводы относительно эффективности каждого метода в зависимости от вида функции и требуемой точности.

Порядок выполнения заданий:

1. Получив исходные данные, выберите соответствующий численный метод.
2. Выполните расчет вручную, соблюдая алгоритм выбранного метода.
3. Оформите отчет по каждому заданию, включив расчеты, промежуточные этапы и итоговые результаты.
4. По результатам выполненной работы сделайте вывод о применимости выбранного метода и предложите возможные улучшения.

Критерии оценки:

Показатель	Максимальное число баллов
Верность выбора метода	3 балла
Правильность расчётов	4 балла
Четкость оформления отчета	2 балла
Обоснованность выводов	1 балл

Максимальная оценка — **10 баллов**

Итоговая оценка выставляется преподавателем исходя из набранных студентом баллов.

Критерии оценки:**Оценка «5»**

Полностью правильно выбран численный метод для каждой задачи.

Все необходимые расчеты выполнены точно и аккуратно.

Отчет составлен грамотно, структура четкая, оформление соответствует требованиям.

Выводы обоснованы и соответствуют полученным данным, приведены адекватные рекомендации по улучшению методов.

Оценка «4»

Допущены незначительные ошибки в выборе метода или проведении расчетов.

Имеются небольшие погрешности в оформлении отчета.

Представлены верные выводы, однако рекомендации сформулированы недостаточно подробно.

Оценка «3»

Использован неверный метод для одной из задач либо допущены значительные ошибки в расчетах.

Некоторые элементы отчета отсутствуют или изложены некорректно.

Не представлены достаточные пояснения и интерпретация полученных результатов.

Оценка «2»

Значительная часть заданий выполнена неправильно.

Расчеты проведены с грубыми ошибками.

Отсутствует обоснованность выводов, имеются серьезные недостатки в структуре отчета.

Тема практической работы № 4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, объем часов 1.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование у студентов навыков практического применения метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Задания:

Решите следующие системы линейных уравнений методом Гаусса:

Задача 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Задача 2:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Порядок выполнения заданий:

1. Запишите исходную систему уравнений в матричной форме.
2. Осуществите прямой ход метода Гаусса путем элементарных операций над строками матрицы.

3. Найдите решение системы обратной подстановкой.
 4. Подставьте найденные значения в исходные уравнения для проверки.
- Оформите отчёт по решению каждой задачи отдельно, представляя шаги преобразования матрицы и обоснование действий.

Форма отчетности:

Отчёт по занятию включает:

Исходные условия задачи.

Последовательность шагов прямого и обратного хода метода Гаусса.

Итоговое решение и проверку правильности.

Критерии оценки:

Показатель	Баллы
Корректность алгоритма	3
Грамотность расчетов	3
Оформление отчёта	2
Проверка решения	2

Итого максимальное количество баллов: **10**

Итоговая оценка выставляется преподавателем исходя из набранных студентом баллов.

Критерии оценки:

Оценка «5» («Отлично»)

Выполнение всех условий и предъявляемых требований:

Алгоритм метода Гаусса использован корректно и последовательно.

Все расчеты произведены без ошибок, приводящие к правильному результату.

Результат представлен ясно и понятно, отчет написан чётко и грамотно.

Проводится тщательная проверка решения.

Оценка «4» («Хорошо»)

Допустимы небольшие отклонения:

Могут присутствовать отдельные небольшие ошибки в расчетах, исправляемые самостоятельно.

Есть минимальное отклонение от рекомендованного порядка решения, не влияющее существенно на правильность итогового результата.

В целом работа представлена качественно, хотя и допускаются мелкие неточности.

Оценка «3» («Удовлетворительно»)

Имеются значимые нарушения:

Используется неправильный порядок шагов метода Гаусса или существуют серьёзные ошибки в отдельных этапах решения.

Рассчитанные результаты требуют дополнительной коррекции.

Работа оформлена небрежно, возможны пропуски важных элементов отчета.

Оценка «2» («Неудовлетворительно»)

Значительное невыполнение условий задания:

Использование неправильного подхода к решению или отсутствие правильного понимания метода Гаусса.

Присутствуют множественные ошибки в расчетах, приводящие к совершенно неверному результату.

Отчет плохо структурирован, имеется большое количество недостатков.

Тема практической работы № 5. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, объем часов 1.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование практических навыков решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера с использованием численных методов и основ линейной алгебры.

Задания:

Задание 1. Каждый студент получает индивидуальное задание, состоящее из двух-трех систем линейных уравнений различного уровня сложности. Студент решает систему самостоятельно, применяя изученный алгоритм.

Вариант 1.

Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

Вариант 2.

Определите корни следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - z & = 5, \\ x - 3y + 2z & = -1, \\ -x + 2y + z & = 3 \end{cases}$$

Вариант 3.

Используя метод Крамера, найдите решение системы:

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 3, \\ 2x - y + z & = 1, \\ -x + y + 2z & = 2 \end{cases}$$

Вариант 4.

Решите систему уравнений с помощью определителей:

$$\begin{cases} 2x - y + z & = 3, \\ x + 3y - 2z & = 1, \\ -x + y + z & = 2 \end{cases}$$

Вариант 5:

Вычислите точное значение переменных системы:

$$\begin{cases} x - y + z & = 2, \\ 2x + y - z & = 3, \\ -x + 2y + z & = 1 \end{cases}$$

Задание 2. Выполните расчет приведенной ниже системы уравнений двумя способами: сначала вручную, затем используя инструменты пакета MathCAD:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Проверка выполненных работ

Преподаватель проводит выборочную проверку выполненных заданий, комментируя типичные ошибки и показывая правильное решение наиболее сложных примеров.

Рефлексия и обсуждение

Подведение итогов занятия, формулировка выводов.

Критерии оценки выполнения практической работы:

Правильность выбора метода решения.

Корректность выполнения этапов расчёта.
Четкость изложения полученного результата.
Оформление отчёта о выполненном задании.

Оценочная шкала:

Отлично: Все расчеты выполнены верно, отчет аккуратно оформлен.
Хорошо: Небольшие погрешности в оформлении, правильный конечный результат.
Удовлетворительно: Ошибки в ходе вычисления, но общий подход верен.
Неудовлетворительно: Значительные ошибки, неверное применение метода.

Тема практической работы № 6. Применение численных методов для больших систем уравнений, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - закрепление навыков решения больших систем линейных уравнений с использованием численных методов (метод Гаусса-Жордана, итерационные методы Якоби и Гаусса-Зейделя). Освоение основных подходов и приемов обработки крупных массивов данных.

Задания:

Индивидуальная работа студентов над решением большой системы уравнений выбранного численным методом. Каждому студенту предоставляется случайная система уравнений размером примерно 10×10 :

Вариант 1. Решите следующую систему уравнений численно с помощью метода Гаусса-Жордана:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

Вариант 2. Диагонально доминирующая симметричная матрица:

Размер: 10×10

$$AX = B,$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} 3i^2 + 2j^2, & i = j, \\ (-1)^{i+j}/(i+j), & i \neq j, \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 120 \\ 130 \\ 140 \\ 150 \\ 160 \\ 170 \\ 180 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Вариант 3. Разрежённая треугольная матрица:

Размер: 10×10

$$AX = B,$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} i + j, & i > j, \\ 2i + 3j, & i = j, \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Вариант 4. Симметричная трёхдиагональная матрица:

Размер: 10×10

$$AX = B,$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} 4i, & i = j, \\ -i/(i+j), & |i-j| = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Вариант 5. Редко заполненная матрица:

Размер: 10×10

$$AX = B,$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} 1/(\sqrt{ij}), & i \leq j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 120 \\ 130 \\ 140 \\ 150 \\ 160 \\ 170 \\ 180 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Обобщение и контроль

Проверка выполненных заданий путем группового обсуждения результатов. Преподаватель контролирует правильность вычислений и правильность подхода.

Рефлексия

Анализ трудностей, возникших при работе, выявление преимуществ и недостатков используемых методов.

Критерии оценки:

5 («отлично»)

- Верно выбраны численные методы (Гаусс-Жордан, Якоби, Гаусс-Зейдель и др.) в зависимости от структуры матрицы.
- Аккуратно проведено поэтапное решение задачи, правильно рассчитаны детерминанты и обратные матрицы.
- Полностью выполнен весь объем требований задания.
- Представлены четкие и логически последовательные объяснения, хорошо структурированный отчет.
- Ошибка минимальна или отсутствует.

4 («хорошо»)

- Допущено несколько мелких ошибок в расчетах, не повлиявших значительно на результат.
- Использован верный численный метод, хотя возможен небольшой недостаток в детализации этапов.
- Задание выполнено почти полностью, представлены основные части решения.
- Объяснения понятны, отчет составлен ясно, хотя могли бы быть чуть подробнее.

3 («удовлетворительно»)

- Ошибки присутствуют в значительном количестве, однако принципиальных проблем с пониманием материала нет.
- Выбран неверный метод или возникли трудности с правильной реализацией метода.
- Отчет представлен, но не отражает полную картину решения задачи.
- Приведены фрагменты решения, которые указывают на общее понимание предмета, но требуют значительных исправлений.

2 («неудовлетворительно»)

- Выбор численного метода не соответствует задаче, практически отсутствуют верные решения.
- Большое число существенных ошибок в вычислениях и выводах.
- Присутствуют существенные пробелы в понимании численных методов и процедуры решения систем уравнений.
- Работа представлена фрагментарно, значительная часть задания не выполнена.

Тема практической работы № 7. Реализация метода Ньютона для решения нелинейных уравнений, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование практических навыков реализации численного метода Ньютона для нахождения корней нелинейных уравнений с использованием программного обеспечения.

Задания:

Задание 1. Постановка задачи: решить нелинейные уравнения вида $f(x)=0$ методом Ньютона.

Пример: Найти корень уравнения $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$ на интервале $[-1; 1]$.

Алгоритмизация задачи:

Запишите исходное уравнение.

Определите производную функции $f'(x)$.

Выберите начальное приближение x_0 .

Составьте итерационную формулу метода Ньютона:
 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

Установите критерий остановки процесса
(например, $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-6}$).

Примеры нелинейных уравнений различной степени сложности, которые можно решать методом Ньютона:

Простые нелинейные уравнения:

1. $\sin x - x^2 = 0$

2. $e^x - 2x - 1 = 0$

3. $x^3 - 3x + 1 = 0$

4. $\ln(x) - x + 1 = 0$ ($x > 0$)

5. $x^2 - e^{-x} = 0$

Средней сложности нелинейные уравнения:

1. $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

2. $\cos x - x^3 + 1 = 0$

3. $x e^x - x^2 - 1 = 0$
4. $x \sin x - x^2 + 1 = 0$
5. $(x - 1)^3 - x \ln x = 0 (x > 0)$

Сложные нелинейные уравнения:

1. $x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$
2. $\tan x - x^2 + 2 = 0$
3. $e^{\sin x} - x \cos x - 1 = 0$
4. $x^3 + \sqrt{x} - 2x + 1 = 0 (x \geq 0)$
5. $\frac{\sin x}{x} - x^2 + 1 = 0 (x \neq 0)$

Критерии оценивания задания 1:

Отлично ("5"):

Теоретически обоснован правильный выбор подходящего метода для конкретного типа уравнения.

Корректно составлено пошаговое решение согласно предложенному алгоритму.

Верно подобраны начальные условия (если метод требует такого шага).

Приведён подробный ход расчётов с пояснением каждого этапа и интерпретацией полученных результатов.

Решение доведено до конца и даёт верный конечный ответ.

Полученные корни проверяются обратной подстановкой в исходное уравнение.

Итоговая работа представлена чётко структурированным отчетом, содержащим описание метода, формулы, расчётные таблицы, графики и выводы.

Хорошо ("4"):

Правильно выбрана методика, соответствующая типу уравнения.

Расчёты проведены последовательно, хотя возможны небольшие арифметические погрешности.

Начало решения обосновано выбором рациональных начальных приближений.

Есть лёгкая путаница в ходе рассуждений, допускаются мелкие недочеты в оформлении, но в целом они не влияют существенно на общий результат.

Проверка корнями проведена корректно, выявлена возможная погрешность вычислений.

Отчёт представлен удовлетворительно, возможно отсутствие детальных графиков или таблиц, но ключевые моменты отображены ясно.

Удовлетворительно ("3"):

Использован подходящий метод, но процесс решения организован слабо систематично.

Имеются серьёзные трудности в подборе начальных приближений или определении области применимости метода.

Допущены существенные ошибки в процессе расчётов, затрудняющие получение правильного ответа.

Представлены лишь частичные проверки результатов, проверка обратными подстановками либо неверна, либо неполна.

Результат представлен неясно, логика изложения нарушена, наблюдается недостаток необходимых пояснений и деталей.

Отчёт имеет слабые стороны оформления, структура хаотична, присутствуют грубые грамматические ошибки.

Неудовлетворительно ("2"):

Метод подобран неправильно или совершенно отсутствует понимание выбора подхода.

Нарушение последовательности шагов решения, неправильные операции приводят к искажению хода исследования.

Начальные условия подобраны некорректно, приводящие к несуществующим или бессмысленным результатам.

Использование вычислительной техники неэффективно или невозможно проверить правильность.

Окончательные результаты ошибочны или не соответствуют задаче.

Отчёт представляет собой неразборчивый текст, полный ошибок, крайне низкого качества оформления, отсутствующих ключевых компонентов (алгоритмов, формул, графика).

Задание 2. Программирование: напишите программу на Python или другом языке программирования, реализующую метод Ньютона:

```
import math

def func(x):
    return x**3 - 2*x**2 + 3 # Исходная функция

def derivative(x):
    return 3*x**2 - 4*x # Производная функции

def newton_method(f, df, x0, epsilon=1e-6, max_iter=100):
    xn = x0
    for n in range(max_iter):
        fx = f(xn)
        if abs(fx) < epsilon:
            print('Корень найден:', xn)
            break
        dfx = df(xn)
        if dfx == 0:
            print("Ошибка: производная равна нулю")
            return None
        xn = xn - fx / dfx
    else:
        print("Достигнуто максимальное число итераций.")
```

Вычисления и анализ результатов:

Проверьте работу программы, используя разные начальные приближения и задав значения $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-6}$, $\varepsilon=10^{-8}$.

Оцените влияние выбора начальной точки на скорость сходимости метода.

Проанализируйте поведение метода при разных значениях параметра точности ε .

Отчет по работе:

Обучающиеся представляют отчет, включающий постановку задачи, описание используемого метода, код программы, промежуточные и итоговые результаты расчетов, выводы о влиянии начальных условий и точности вычислений.

Критерии оценки задания 2:

Оценка	Условия выставления
«5»	Выполнены все этапы работы. Постановка задачи выполнена верно. Алгоритмизирован правильно. Программа написана грамотно, работает корректно. Анализ выполнен полно и подробно. Отчёт составлен аккуратно, соответствует требованиям, включает необходимые разделы и элементы. Сделаны правильные выводы относительно влияния начальных условий и критерия останова.
«4»	Работа выполнена качественно, допущено минимальное количество ошибок: Одна-две незначительных ошибки в постановке задачи или описании алгоритма. Незначительная ошибка в программе, исправляемая легко. Необоснованный выбор некоторых начальных условий. Недостаточная детализация анализа, однако общая картина ясна. Выводы сделаны, хотя недостаточно развернуты.
«3»	Основные требования выполнены, но имеются значительные недостатки: Ошибки в формулировании задачи или составлении алгоритма. Наличие существенных недостатков в программе, влияющих на её работоспособность. Ограниченный объём анализа, поверхностные выводы. Некачественно оформленный отчёт, пропуск важных элементов структуры отчёта.
«2»	Основная масса требований не выполнена: Неправильная постановка задачи. Грубые ошибки в алгоритме и программах. Отсутствие полного анализа полученных результатов. Полностью отсутствует вывод о влиянии критериев сходимости. Оформление отчёта неудовлетворительное, важные разделы отсутствуют или неполные.

Тема практической работы № 8. Применение численных методов для задач оптимизации в нелинейных системах, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование практических навыков применения численных методов оптимизации для решения инженерных и технических задач с использованием современных компьютерных инструментов.

Задания:

Ход занятия:

I. Подготовительный этап

Преподаватель проводит вводный инструктаж, напоминает основные положения теории оптимизации и обозначает цели занятия. Студентам предлагается сформулировать свою рабочую гипотезу о применении численных методов в реальных ситуациях.

II. Основной этап

Студенты получают индивидуальные задания и приступают к выполнению своей части проекта:

Примеры индивидуальных заданий:

Простые задачи:

1. Минимизировать функцию двух переменных:

$$f(x,y)=x^2+y^2-xy-x-y$$

Определить глобальный минимум на множестве всех вещественных чисел.

2. Максимизировать прибыль предприятия:

Пусть производство товара характеризуется функцией прибыли:

$$P(q)=q^2-10q+25$$

где q — объем производства продукции.

Найдите оптимальный объем выпуска продукции, максимизирующий прибыль.

3. Оптимизация стоимости материалов:

Требуется минимизировать затраты на строительство забора прямоугольной формы площадью S . Длина забора должна составлять ровно 10 метров. Какие размеры забора будут наиболее экономичными?

Средней сложности задачи:

1. Поиск экстремума сложной функции:

Минимизировать функцию трех переменных:

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2-xyz$$

при ограничениях $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

2. Оптимизация затрат на логистику:

Фирма перевозит груз двумя видами транспорта: автомобильным и железнодорожным. Стоимость перевозки автомобилем составляет C_a , а железная дорога обходится в C_j . Необходимо выбрать оптимальное соотношение перевозок автомобилями и поездами, чтобы минимизировать общие расходы, при условии общего объема груза V .

3. Распределение ресурсов:

Имеется предприятие, которое производит два продукта А и В. Прибыль от единицы продукта А составляет p_A , от продукта В — p_B . Ресурсов ограничено общим объемом R . Нужно определить, какое количество продуктов А и В произвести, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

Сложные задачи:

1. Задача оптимизации конструкции моста:

Необходимо спроектировать мост минимальной массы, выдерживающий определённую нагрузку. Геометрия моста определяется функциями площади поперечного сечения балки и длины пролета. Следует подобрать такую конструкцию, которая обеспечит наименьшую массу при выполнении всех конструктивных требований прочности.

2. Задача распределения энергоресурсов:

Энергосистема состоит из нескольких электростанций, каждая из которых обладает разными возможностями выработки энергии и стоимостью топлива. Необходимо распределить выработку электроэнергии таким образом, чтобы удовлетворить спрос потребителей и минимизировать общую стоимость топливных расходов.

3. Логистика транспортного маршрута:

Нужно построить оптимальный транспортный маршрут для доставки товаров от производителя к потребителям, учитывая ограничения по вместимости транспортных средств, расстоянию и времени пути. Цель — минимизировать транспортные издержки и обеспечить своевременную доставку грузов.

Этапы работы над заданием:

1. Выбор оптимального метода решения поставленной задачи.

2. Подготовка моделируемой функции и определение ограничений.

3. Написание программы на Python для каждой выбранной методики.

4. Интерпретация и представление результатов расчета.

5. Создание отчета с описанием выполненного задания, графиками, таблицами и выводами.

Требования к оформлению отчета:

Отчеты предоставляются в письменном виде или в электронном формате PDF, включая введение, основную часть с решением задачи, заключение и список использованной литературы.

III. Заключительный этап

Подведение итогов занятия, обсуждение возникших вопросов и проблем, обобщение материала, выданных рекомендаций по дальнейшему освоению предмета.

Критерии оценки:

Оценка "5":

Грамотно поставлен анализ задачи и сделан правильный выбор соответствующего численного метода оптимизации.

Последовательно осуществлен весь цикл этапов решения: обоснование выбора метода, построение модели, реализация алгоритма, верификация результатов.

Результаты обработки данных проанализированы детально, проведен качественный сравнительный анализ альтернативных подходов.

Итоговый ответ достигнут путем грамотного выбора начальных условий и настройки параметров метода.

Доклад оформлен профессионально, содержательно и наглядно, представлены все требуемые компоненты (графики, таблицы, расчеты).

Вывод лаконичен и обоснован, полностью согласуется с задачей.

Оценка "4":

Правильный выбор метода оптимизации, но встречаются некоторые упрощения в анализе исходных данных.

Решение выполнено технически грамотно, но отдельные шаги пропущены или описаны менее детально.

Промежуточные расчеты выполнены корректно, но в отдельных случаях наблюдаются случайные арифметические ошибки.

Качественный анализ и сравнение методов присутствует, но ограничен отсутствием глубины аргументации.

Графики и таблицы представлены, но требуют улучшения представления.

Ответ дан точный, но выводы содержат некоторую неопределенность.

Оценка "3":

Выбран приемлемый метод, но теория и практика показывают признаки слабого понимания основных принципов оптимизации.

Значительная доля этапов решения выполнена формально, обнаруживаются серьезные пробелы в расчетах.

Недостаточно глубокое исследование проблемы, использование неоптимальных начальных условий или плохих настроек параметров метода.

Некорректно интерпретируются результаты моделирования, допущены крупные ошибки в сравнении альтернативных вариантов.

Отчет сформирован плохо, иллюстративный материал недостаточен или вовсе отсутствует.

Финальный ответ носит предположительный характер, содержит сомнения и неуверенности.

Оценка "2":

Произведен грубый подбор метода, задача решалась бессистемно, проявилась неспособность критически осмыслить ситуацию.

Многие этапы решения пропущены, допущены многочисленные ошибки в вычислениях и выборе начальных условий.

Практически полное игнорирование необходимости сравнения различных подходов и отсутствия анализа чувствительности решения.

Качество отчета низкое, оно фактически не раскрывает сути задачи и демонстрирует полную несостоятельность студента.

В итоге получен неверный ответ, подтверждающий недостаточную подготовку учащегося к выполнению самостоятельной работы.

Тема практической работы № 9. Интерполяция методом Лагранжа для восстановления недостающих данных, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - приобретение студентами навыков восстановления недостающей информации в экспериментальных данных с использованием метода Лагранжа.

Задания:

Каждый студент получает индивидуальное задание следующего содержания:

Задание: Исходные данные измерения некоторой физической величины имеют вид следующей таблицы:

Время t (секунды)	Температура T ($^{\circ}\text{C}$)
0	20
1	?
2	30
3	40
4	?
5	50

Необходимо восстановить значение температуры при времени $t=1$ секунда и $t=4$ секунды с помощью метода Лагранжа. Для этого:

1. Рассчитайте коэффициенты многочлена Лагранжа.
2. Создайте соответствующую программу на Python, реализующую восстановление данных.
3. Постройте график зависимости температуры от времени, отметив известные и восстановленные точки.
4. Дайте рекомендации по улучшению точности интерполяции.

Этапы выполнения задания:

1. Определение узловых точек для построения многочлена Лагранжа.
2. Составление выражения для интерполирующего многочлена.
3. Программная реализация процедуры восстановления данных.
4. Визуализация результатов на графике.
5. Формулировка вывода о целесообразности применения метода Лагранжа в данном случае.

Подведение итогов:

Проведение коллективного обсуждения, разбор возникающих вопросов, общее обсуждение итогов занятия и индивидуальных достижений студентов.

Форма отчетности:

Документально оформить отчёт, содержащий описание задачи, используемые формулы, листинг программы, графические иллюстрации и выводы.

Критерии оценки:

Оценка "5" («отлично»):

Четкое понимание и правильное применение метода Лагранжа для восстановления недостающих данных.

Совершенно корректно построено выражение для интерполирующего многочлена.

Программа на Python реализована эффективно и надежно восстанавливает искомые значения.

Все шаги и этапы работы расписаны подробно и аргументированно.

Грамотно построен график, демонстрирующий восстановленную зависимость.

Выводы ясные, полные и убедительные.

Работа выполнена своевременно и в полном объеме.

Оценка "4" («хорошо»):

Основательное знание и владение методом Лагранжа.

Некоторые погрешности в расчетах или небрежности в оформлении выражений.

Программа написана корректно, но возможно наличие мелких опечаток или незначительных ошибок.

График достаточно информативен, но возможен небольшой недостаток наглядности.

Выводы последовательны, но могли бы быть более развёрнутыми.

Возможно небольшая задержка в сдаче работы.

Оценка "3" («удовлетворительно»):

Базовое понимание метода Лагранжа, но заметные затруднения в применении.

Несоответствие в построении интерполирующих выражений.

Исправимая ошибка в написании программы, не позволяющая получить точные результаты.

График построен частично, демонстрация недостоверна.

Выводы носят скорее декларативный характер, без глубокого анализа.

Возможны задержки в сроке сдачи работы.

Оценка "2" («неудовлетворительно»):

Глубокое непонимание сущности метода Лагранжа.

Беспорядочное выполнение задачи, незнание порядка действий.

Принципиальная ошибка в реализации программы, препятствующая восстановлению данных.

Неточность или абсурдность представленных графиков.

Абсолютно неподтвержденные выводы, противоречащие данным эксперимента.

Работу практически невозможно принять ввиду серьезных нарушений сроков и формальных дефектов исполнения.

Тема практической работы № 10. Построение полиномиальной интерполяции для реальных данных, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - ознакомление с понятием полиномиальной интерполяции и различными способами её реализации; освоение методов подбора полиномов подходящей степени для реконструкции функциональных зависимостей; автоматизация процесса интерполяции с использованием библиотеки NumPy/Python; практическое применение полученных знаний на примере реальных данных измерений.

Задания:

Каждому студенту выдается индивидуальное задание следующего характера:

Индивидуальное задание: Вам предоставлены реальные данные наблюдений физического явления, представленные в таблице ниже:

№ наблюдения	Значение переменной X	Значение переменной Y
1	1	2.1
2	2	3.9
3	3	5.2
4	4	6.7
5	5	8.3

Постройте полином второй степени, проходящий через указанные точки, и рассчитайте значения Y для промежуточных значений X ($X=1.5$, $X=3.5$). Используйте библиотеку NumPy для осуществления расчетов.

Последовательность действий:

1. Импортируйте модуль numpy и pandas для загрузки данных.
2. Примените встроенную функцию polyfit() для расчета коэффициентов полинома.
3. Постройте график исходных данных и интерполирующей кривой.
4. Используя полученные коэффициенты, найдите значения Y для указанных промежуточных точек.
5. Оформите отчет с приведением исходных данных, расчетных формул, графа и выводов.

Подведение итогов:

Проведение совместного обсуждения выполненной работы, выявление общих закономерностей и особенностей метода полиномиальной интерполяции.

Требование к оформлению отчета:

Документы должны содержать подробную структуру работы, включая цель, исходные данные, таблицу результатов и диаграммы, сопровождающиеся комментариями и заключениями.

Критерии оценки:

Оценка «5» («отлично»):

Полностью корректно построена полиномиальная интерполяционная формула.

Правильно определены коэффициенты полинома, обеспечивающие прохождение через заданные точки.

Скрипт на Python написан аккуратно и исполняется без сбоев.

График построен точно и наглядно, отражая реальную картину поведения исследуемой функции.

Во всех пунктах отчета содержится полная информация, расчеты произведены правильно.

Продемонстрировано уверенное владение темой, глубокий анализ и корректные выводы.

Оценка «4» («хорошо»):

Основное понимание принципа полиномиальной интерполяции продемонстрировано.

Коэффициенты найдены верно, но возможна одна или две небольших ошибки в расчетах.

Программой можно пользоваться, но возможно наличие небольших синтаксических ошибок или погрешностей в комментариях.

График изображен с небольшими огрехами, допускающими улучшение.

В отчете присутствуют все необходимые пункты, но детали проработаны менее глубоко.

Допускается минимальная задержка в сдаче отчета.

Оценка «3» («удовлетворительно»):

Общая идея интерполяции понята, но возникают значительные трудности в применении.

Имеется значительная ошибка в расчете коэффициентов, препятствующая точной интерполяции.

Программа выполнена неаккуратно, часто выдаёт предупреждения или исключения.

График воспроизведён некачественно, затрудняя восприятие результатов.

Отчёт содержит ряд пропусков и несоответствий в структуре.

Может наблюдаться задержка в сроках подачи работы.

Оценка «2» («неудовлетворительно»):

Уровень усвоения темы крайне низкий, метод применяется некорректно.

Наблюдаются принципиальные ошибки в формировании полинома.

Программа написана с серьезными нарушениями, сильно замедляя исполнение или делая невозможным получение правильных результатов. График отсутствует или абсолютно неадекватен представлению данных. Отчёт подготовлен некачественно, большое количество пропусков и неточностей. Работы представлена с существенным нарушением установленных сроков.

Тема практической работы № 11. Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации данных, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - сформировать у студентов практические навыки применения метода наименьших квадратов для обработки и аппроксимации эмпирических данных.

Задания:

Студенты решают индивидуальные задания следующего типа:

Индивидуальное задание:

Получив следующий набор экспериментальных данных:

Эксперимент	Переменная X	Переменная Y
1	1	2.1
2	2	3.9
3	3	5.2
4	4	6.7

5	5	8.3
---	---	-----

постройте линию регрессии (линейную и параболическую) методом наименьших квадратов. Сравните обе модели и выберите лучшую по качеству аппроксимации.

Порядок выполнения задания:

1. Загрузите массив данных в среду Python.
2. Рассчитайте коэффициенты прямой линии и параболы, используя метод наименьших квадратов.
3. Постройте графики обеих моделей вместе с исходными данными.
4. Определите среднее отклонение для каждой модели и сделайте вывод о лучшей аппроксимирующей функции.
5. Оформите отчет, содержащий результаты расчётов, графики и выводы.

Подведение итогов:

Коллективное обсуждение проведенных расчетов, выводы о достоинствах и недостатках обоих методов аппроксимации.

Форма отчетности:

Документация оформляется письменно или в цифровом виде, должна включать заголовок, исходные данные, результаты расчётов, графики и финальный вывод.

Критерии оценки:

Оценка «5» («отлично»):

Полностью разобрался с методологией метода наименьших квадратов. Верно рассчитан коэффициент линейной и параболической регрессий. Скрипты написаны идеально, без ошибок, быстро выполняются и выдают ожидаемый результат. Графики построены четко, понятно демонстрируют связь между данными и моделью. Сделано точное сравнение качества аппроксимации, указан лучший вариант с аргументированными причинами.

Полностью соблюдены сроки выполнения работы, отчет оформлен безупречно.

Оценка «4» («хорошо»):

Достаточно хорошо владеет предметом, хотя допускает минимальные неточности в расчетах.

Коэффициенты рассчитаны почти верно, небольшие отклонения допустимы. Код работает стабильно, но может иметь незначительные стилистические ошибки.

Графики читаемы, хотя могли бы быть немного точнее или лучше подписаны.

Сравнительный анализ проведён удовлетворительно, выбран лучший вариант, но объяснения могут быть короче.

Срок сдачи отчета незначительно превышен, допустимо наличие малозначимых помарок.

Оценка «3» («удовлетворительно»):

Основы метода известны, но проявляется значительное непонимание деталей.

Ошибки в вычислении коэффициентов или интерпретации данных вызывают большие сомнения в результате.

Программы нестабильно функционируют, возможны частые сбои или выдача неверных результатов.

Графики выполнены неудовлетворительно, затрудняют восприятие данных.

В отчёте имеется множество пропусков, неглубокий анализ.

Большая задержка в предоставлении отчета.

Оценка «2» («неудовлетворительно»):

Нет понимания основного материала, очевидные нарушения базовых принципов метода.

Невозможность рассчитать коэффициенты, принципиально неправильное применение метода.

Неработоспособный скрипт, невозможность провести даже элементарные тесты.

Никакого внятного графика или его абсолютная неуместность.

Отчёт оформлен халатно, отсутствует основная информация, затрудняет восприятие результатов.

Крайне поздняя подача работы, без возможности исправить ошибки.

Тема практической работы № 12. Аппроксимация данных с использованием сплайнов, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - освоение студентами методов аппроксимации экспериментальных данных кубическими сплайнами, развитие практических

навыков реализации численных алгоритмов с использованием современных инструментов программирования.

Задания:

Задание 1. Минисеминар по вопросам (15 мин):

Теория сплайновой аппроксимации:

Определение понятия сплайна, классификация видов сплайнов (линейные, квадратичные, кубические). Основные свойства сплайнов и области их применения.

Алгоритм построения кубических сплайнов:

Формулировка условий гладкости и непрерывности первой и второй производных, решение системы уравнений для нахождения коэффициентов сплайна.

Интерполяционная задача и условия выбора типа сплайна:

Интерполирующие и сглаживающие сплайны, выбор граничных условий (естественный сплайн, периодический сплайн).

Задание 2. Практическая работа обучающихся:

Задания для практической работы:

Задача № 1. Даны значения функции $f(x)$ в точках (x_i, y_i) , построить кубический сплайн-интерполянт для аппроксимации значений промежуточных точек. Вычислить значение функции в точке, лежащей внутри интервала табличных значений.

Задача № 2. По результатам измерений температуры воздуха за сутки восстановить график изменения температуры с помощью кубической сплайн-аппроксимации. Определите погрешность аппроксимации относительно реальных измеренных значений.

Задача № 3 (дополнительная). Реализовать интерактивный интерфейс, позволяющий визуально отображать точки и полученный сплайн-график. Использовать библиотеку Matplotlib для визуализации результата.

Методические рекомендации:

Для выполнения заданий рекомендуется использование среды разработки Python с установленными пакетами NumPy и SciPy. Перед началом работы студентам предлагается провести ознакомление с примерами аналогичных расчетов, представленных преподавателем.

Обучающиеся выполняют задание индивидуально либо в группах по два-три человека. Преподаватель оказывает консультативную помощь, контролирует ход выполнения работ и проводит итоговые проверки полученных результатов.

Требования к отчету:

Отчет должен содержать постановку задачи, описание используемого метода, подробное описание этапов расчета, листинг программы, скриншоты графиков и выводы о точности полученной аппроксимации.

Контроль качества усвоения материала:

Оцениваются правильность решения поставленных задач, полнота реализации предложенного программного кода, аккуратность оформления отчета, уровень понимания теоретического материала.

Критерии оценки:

Оценка «5» («отлично») выставляется студенту, если выполнены следующие требования:

Полностью верно выполнено задание;

Правильно выбран метод аппроксимации и построен соответствующий сплайн;

Программа работает стабильно, демонстрирует точный расчет всех необходимых показателей;

Отчёт составлен грамотно, структурирован последовательно, с четким описанием каждого этапа выполнения задания;

Выполнены дополнительные элементы задания (например, реализация интерактивного интерфейса или применение дополнительной обработки данных);

Студент продемонстрировал глубокое понимание предмета и способен самостоятельно решить аналогичную задачу.

Оценка «4» («хорошо») выставляется студенту, если выполнены следующие требования:

Основная часть задания выполнена правильно, однако имеются незначительные вычислительные ошибки или отклонения от оптимального пути решения;

Алгоритмы работают корректно, хотя возможны небольшие улучшения;

Программный код достаточно понятен, соблюдены основные правила написания качественного кода;

Отчёт написан аккуратно, хотя возможна некоторая недостаточная детализация отдельных моментов.

Оценка «3» («удовлетворительно») выставляется студенту, если выполнены следующие требования:

Задача выполнена частично, допущены значительные ошибки в построении сплайна или выборе границ условий;

Код имеет проблемы, но в целом даёт приемлемый результат;

Отчёт неполный, отсутствует чёткое изложение ключевых шагов расчёта;

Ошибки не носят критичный характер, позволяют исправить проблему при небольшой доработке.

Оценка «2» («неудовлетворительно») выставляется студенту, если:

Не достигнут минимальный уровень выполнения поставленной задачи;

Допущены грубые ошибки в формулировании условий задачи, применении методов аппроксимации или неверно построена программа;

Нет доказательств самостоятельного участия студента в выполнении задания;

Отчёт несостоятелен или вообще отсутствует.

Тема практической работы № 13. Реализация методов численного дифференцирования, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - ознакомление студентов с методами численного дифференцирования и формирование навыков реализации соответствующих алгоритмов на практике.

Задания:

Каждому студенту предоставляется индивидуальное задание по решению задачи численного дифференцирования одной из указанных ниже функций:

Номер	Функция
1	$f(x)=x^3+2x^2-x$
2	$f(x)=\sin(x)$
3	$f(x)=e^{-x}$
4	$f(x)=\ln(x)$
5	$f(x)=x^{1/2}$

Задание заключается в следующем:

1. Написать программу на Python для вычисления первой и второй производных выбранной функции с помощью метода центральных разностей.
2. Провести исследование зависимости точности вычислений от величины шага сетки h , взяв диапазон значений h от 10^{-1} до 10^{-6} .

3. Создать графики зависимостей рассчитанных производных от аргумента x и проанализировать результаты.

Оформление отчета:

Каждый студент составляет письменный отчет, содержащий:

Постановку задачи,

Листинг своей программы,

Графики рассчитанных производных и вывод о влиянии шага сетки на точность вычислений.

Критерии оценки:

Оценка «5» (отлично)

Работа выполнена своевременно и полностью соответствует заданию.

Все этапы задания успешно реализованы.

Приведён правильный расчёт производных с помощью численных методов, проведен грамотный анализ зависимости точности от шага сетки.

Представлены качественные графики, соответствующие условиям задания.

Имеется детальный отчёт с выводами и правильным оформлением.

Ответы на вопросы преподавателя показывают полное понимание материала.

Оценка «4» (хорошо)

Основное задание выполнено, но присутствуют мелкие недостатки в оформлении или графике.

Возможны небольшие ошибки в расчете производных, не повлиявшие существенно на общий результат.

Показано хорошее владение материалом, но возможно наличие небольших пробелов в понимании некоторых деталей.

Оценка «3» (удовлетворительно)

Часть задания выполнена, основная идея ясна, но присутствует значительное количество мелких ошибок или пропусков.

Результаты представлены недостаточно подробно, качество графиков оставляет желать лучшего.

Существуют трудности в интерпретации полученных данных и анализе точности вычислений.

Оценка «2» (неудовлетворительно)

Задание выполнено фрагментарно или неправильно.

Расчеты содержат существенные ошибки, препятствующие правильному пониманию материала.

Недостаточное представление процесса работы и отсутствие выводов.

Необходимость повторной работы над темой и исправления существенных недостатков.

Тема практической работы № 14. Применение численного дифференцирования для анализа данных, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование практических навыков вычисления производных функций методами численного дифференцирования и применение полученных результатов для анализа реальных данных.

Задания:

Задание 1. Для заданной функции $y = \sin x$ рассчитать первую производную в точке $x=1$, используя центральную формулу с шагом $h=0.1$. Выполнить расчет вручную и сравнить полученный результат с истинным значением производной $\cos x$.

Решение должно содержать:

Таблицу исходных данных (x_i, y_i) для трех точек около $x=1$

Расчет производной по центральной формуле

Сравнение полученного результата с точным значением ($\cos 1$).

Задание 2. Дана таблица измерений температуры воздуха в зависимости от времени суток:

Время, ч	Температура, °C
6	10
8	12
10	15
12	18

14	20
16	22
18	24

Используя метод центральных разностей, оценить скорость изменения температуры в моменты времени $t=10$, $t=14$ часа. Сделать вывод о характере изменения температуры.

Задание 3. Используя таблицу значений функции $f(x)=e^{-x}$ в точках $x= -1, -0.5, 0, 0.5, 1$, рассчитайте вторую производную в точке $x=0$ по формуле центральных разностей. Сделайте вывод о выпуклости графика функции вблизи точки $x=0$.

Подведение итогов занятия, обсуждение возникших вопросов, выставление оценок.

Требования к отчету:

Отчёт должен включать:

Название и цель занятия.

Подробные расчеты всех заданий.

Выводы по каждому заданию.

Анализ точности применяемых методов.

Критерии оценки:

Оценка «5»

Студент демонстрирует полное понимание материала и правильно решает поставленную задачу:

Все задания выполнены верно.

Производные рассчитаны точно, соблюдены правила округления.

Приведены верные промежуточные значения и грамотно использованы формулы численного дифференцирования.

Полученные результаты сопоставлены с аналитическими выражениями (если возможно), сделаны правильные выводы.

Отчёт оформлен аккуратно, разборчиво, подробно описаны шаги выполнения каждого задания.

Работа выполнена самостоятельно, без ошибок и исправлений.

Оценка «4»

Студент показывает хорошее владение материалом, допускает незначительные погрешности:

Большинство заданий выполнено верно.

Возможны небольшие арифметические ошибки, не влияющие существенно на общий результат.

Промежуточные вычисления приведены частично, иногда возможны пропуски некоторых шагов.

Вывод сделан верный, хотя возможен недостаток детализации или глубины анализа.

Оформление отчета удовлетворительное, возможна небольшая небрежность.

Оценка «3»

Студент продемонстрировал частичное освоение материала, имеются значительные недостатки:

Основные задания решены неверно или неполностью.

Есть существенные вычислительные ошибки.

Использованы неправильные формулы либо допущены грубые ошибки в алгоритме решения.

Нет вывода или он поверхностный и недостаточно обоснованный.

Нарушение порядка выполнения пунктов задания, оформление отчёта неудовлетворительно.

Оценка «2»

Студент показал недостаточное знание материала, работа выполнена некачественно:

Не справился с большинством заданий, задача решена неправильно.

Допущено большое число грубейших ошибок в расчетах и применении формул.

Невозможно сделать правильный вывод вследствие серьёзных просчетов.

Нерациональное использование рабочего времени, отсутствие самостоятельности.

Полностью отсутствует отчёт или качество изложения крайне низкое.

Тема практической работы № 15. Применение метода трапеций для численного интегрирования, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - сформировать практические умения применять метод трапеций для приближенного вычисления определенных интегралов.

Задания:

1. Вычислить интеграл методом трапеций:

Рассчитать значение определенного интеграла $I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$, взяв 5 равноотстоящих узловых точек. Найти точное решение интеграла и определить относительную ошибку приближённого метода.

2. Анализ реального набора данных:

Даны измерения расхода топлива автомобиля за определенный промежуток времени (таблица). Необходимо вычислить общее потребление топлива за этот период методом трапеций.

Время, часы	Расход топлива, л/ч
0	8
1	9
2	10
3	11
4	12

Сделать вывод о расходе топлива на основании проведённых вычислений.

3. Численное моделирование физического процесса:

Решите следующую задачу: объект движется вдоль прямой линии со скоростью, зависящей от времени следующим образом: $v(t) = t^2 - t + 1$ (м/с). Определите пройденный путь объекта за интервал времени $[0,3]$ секунд, разделив временной диапазон на 6 равных частей.

Проверьте результат с использованием точного интегрирования, сделайте вывод о качестве приближения.

Подведение итогов занятия, устное обсуждение возникающих трудностей, формулирование общих выводов.

Форма отчетности:

Каждый студент представляет письменный отчет, включающий подробное описание этапов выполнения заданий, ход вычислений и сделанные выводы.

Критерии оценки:

Оценка «5»

Студент выполнил задание полностью и правильно.

Провёл расчёт по формуле метода трапеций, обосновал выбор числа интервалов разбиения.

Показал чёткую последовательность действий, подробно описал этапы решения.

Правильно сделал вывод относительно полученного результата, сравнил его с точным решением (при возможности).

Представил работу своевременно, оформление соответствует требованиям преподавателя.

Оценка «4»

Большая часть заданий выполнена правильно, отдельные ошибки носят случайный характер.

Рассчитанный интеграл имеет небольшую погрешность, однако сам процесс вычислений описан достаточно полно.

Небольшое нарушение последовательности действий или единичные арифметические ошибки.

Сделанные выводы ясны, но могли бы быть более развернутыми.

Оценка «3»

Значительная часть заданий выполнена неверно или некорректно.

Метод выбран правильно, но нарушены важные детали расчёта, отсутствуют пояснения или присутствуют крупные ошибки.

Количество использованных интервалов выбрано неоптимально, приведённые промежуточные результаты сомнительны.

Общий вывод недостаточен или противоречив.

Оценка «2»

Большее количество заданий решено неверно.

Наблюдаются грубые ошибки в понимании принципа метода трапеций или неправильное построение схемы расчёта.

Совершенно отсутствует представление об оценке погрешности.

Результаты представлены формально, без должного объяснения используемых методик.

Тема практической работы № 16. Численное интегрирование методом Симпсона для оценки сложных интегралов, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - овладеть методом Симпсона для приближённого вычисления определённых интегралов сложной структуры.

Задания:

Задание 1. Интеграл простой функции.

Приблизительно вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$ методом Симпсона, выбрав $N=4$ интервала разбиения. Сравнить результат с точной величиной.

Задание 2. Расчёт реальной физической величины.

Вычислить среднее ускорение тела, движущегося согласно закону скорости $v(t)=t^2+t$ на промежутке времени $[0,3]$ сек., воспользовавшись методом Симпсона. Сравните результат с точным решением.

Задание 3. Комплексная инженерная задача.

Определить объем жидкости, протекающей через трубу за время $T=2$ минуты, если зависимость потока жидкости задана функцией $Q(t)=e^{0.5t}$, используя метод Симпсона с числом интервалов $N=6$.

Подведение итогов

Коллективное обсуждение успехов и затруднений. Преподаватель комментирует общие итоги занятий, даёт рекомендации по устранению недостатков.

Требования к выполнению задания:

Выполненная работа должна сопровождаться подробным описанием каждого этапа.

Финальный вывод по каждой задаче должен учитывать качество полученного приближения.

Критерии оценки:

Оценка «5»: полная правильность выполнения всех заданий, глубокое понимание предмета, четкая аргументация и полный отчет.

Оценка «4»: большинство заданий выполнено правильно, некоторые мелкие недочёты допускаются, отчет составлен удовлетворительно.

Оценка «3»: значительное количество ошибок, слабый уровень понимания, слабое обоснование выводов.

Оценка «2»: невыполнение большинства заданий, непонимание сути метода, плохой отчет.

Тема практической работы № 17. Решение ОДУ методом Эйлера, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - освоить технику численного решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера.

Задания: Индивидуальная или парная работа студентов над предложенными задачами:

Задача 1. Простое дифференциальное уравнение.

Решить начальное условие для дифференциального уравнения $y' = x + y$, $y(0) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0.1$. Постройте табличное представление найденного решения и сравните его с аналитическим результатом (где возможно).

Задача 2. Реалистичный пример из физики.

Моделирование движения материальной точки массой $m = 1$ кг., находящейся под действием силы сопротивления среды $F = -\alpha v$, где $\alpha = 0.1$ Н/(м/с) и начальные условия $v(0) = 10$ м/с. Запишите соответствующее дифференциальное уравнение и найдите приближённое решение методом Эйлера на интервале времени $[0, 10]$ с шагом $h = 0.5$.

Задача 3. Экономическая задача.

Рассмотрим простейшую модель роста капитала банка по модели экспоненциального роста: $K'(t) = rK(t)$, $K(0) = P$, где $r = 0.05$ годов., $P = 1000$ рублей. Найдите приблизительное значение капитала спустя 10 лет, применяя метод Эйлера с шагом $h = 1$.

Подведение итогов:

Совместное обсуждение выполненных заданий, выявление возможных проблем и пути их устранения. Предоставление рекомендаций по улучшению точности вычислений.

Порядок сдачи работы:

По окончании занятия каждый студент обязан представить свою работу преподавателю, содержащую подробное описание выполняемых шагов и итоговые результаты.

Критерии оценки:

Оценка «5»: вся работа выполнена качественно, представлен исчерпывающий отчёт, проявлено глубокое понимание материала.

Оценка «4»: работа выполнена преимущественно правильно, но отмечены незначительные ошибки или упущения.

Оценка «3»: допущены многочисленные ошибки, требуются доработки и дополнительная консультация с преподавателем.

Оценка «2»: значительная часть работы выполнена неверно, продемонстрировано минимальное усвоение материала.

Тема практической работы № 18. Применение метода Рунге-Кутты для решения ОДУ в моделировании процессов, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - изучение метода Рунге-Кутты четвертого порядка и приобретение навыков численного решения дифференциальных уравнений для описания физических, технических и экономических процессов.

Задания:

Задание 1. Дифференциальное уравнение свободного падения тел с сопротивлением воздуха.

Необходимо решить дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dv}{dt} = -g + bv,$$

где v — скорость, $g=9.8$ м/с², $b=0.1$ с⁻¹, $v(0)=0$ м/с. Использовать метод Рунге-Кутты с шагом $h=0.1$ секунды на временном интервале $[0,10]$. Проверить решение, сравнив его с известным аналитическим решением.

Задание 2. Имитация динамики банковского вклада.

Пусть капитал растёт по следующей схеме: $dK/dt=rK-d$, где K — сумма денег, $r=0.05$ год⁻¹ — процентная ставка, $d=100$ руб./год — ежегодные расходы. Начальный вклад равен $K(0)=10000$ руб.

Применить метод Рунге-Кутты с шагом $h=1$ год для нахождения суммы через 10 лет.

Задание 3. Биологическая динамика популяции рыб.

Модель численности популяции рыбы подчиняется логистическому закону: $dy/dt=ry(K-y)/K$, где $r=0.2$ год⁻¹, $K=10000$ особей — максимальная численность популяции, $y(0)=1000$ особей.

Используйте метод Рунге-Кутты для вычисления численности популяции через 5 лет с шагом $h=0.5$ года.

Подведение итогов:

Преподаватель подводит итоги занятия, проводится групповое обсуждение возникших трудностей, выдаются индивидуальные рекомендации по дальнейшей работе.

Требования к оформлению отчёта:

Отчёт должен включать название и цель занятия, подробное описание решаемой задачи, необходимые графики (если предусмотрены), поэтапное выполнение расчётов и заключительный вывод по результатам исследования.

Критерии оценки:

«5» («отлично») — все задания выполнены правильно, представлена глубокая логика расчётов, получены точные результаты.

«4» («хорошо») — основная масса заданий выполнена успешно, допущены лишь несущественные ошибки.

«3» («удовлетворительно») — задания выполнены частично, имеются заметные ошибки, требуют дополнительного разъяснения.

«2» («неудовлетворительно») — почти все задания выполнены неверно, присутствует принципиальное недопонимание метода.

Тема практической работы № 19. Решение краевых задач с использованием разностных схем, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы – формирование умений составлять разностные схемы для заданных типов краевых задач, использовать основные виды конечно-разностных аппроксимаций первого и второго порядка точности.

Задания:

1. Реализуйте программу для решения следующей задачи Дирихле:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in [a, b], \quad u(a) = A, \quad u(b) = B$$

Где $a=0, b=1, A=0, B=1$ и $f(x)=\sin(\pi x)$.

2. Решите следующую краевую задачу Неймана:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k \frac{du}{dt} - cu = f(t), \quad t \in [t_0, T], \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_0} = \alpha, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=T} = \beta$$

Параметры: $c=1, k=0.5, \alpha=0, \beta=-1, T=1$.

3. Найдите решение одномерного волнового уравнения с начальными условиями и граничными условиями типа Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [-L, L], \quad t \geq 0, \quad u(-L, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = g(x)$$

Функция начального условия: $g(x)=\cos\pi x$.

Требования к выполнению заданий:

Студенты должны подготовить отчет, включающий:

Постановку исходной задачи.

Описание используемой разностной схемы.

Код программы (Python) с подробными комментариями.

Таблицы значений приближенных решений и графики функций.

Оценку точности найденного решения (ошибка аппроксимации, порядок сходимости).

Форма отчетности:

Отчет оформляется письменно и предоставляется преподавателем в установленный срок.

Критерии оценки:

Баллы	Краткое описание уровня подготовки студента	Подробное пояснение критериев оценки
5	Отлично	Студент уверенно владеет всеми необходимыми теоретическими знаниями, правильно применяет изученные методы, решает поставленную задачу эффективно и точно. Отчёт представлен качественно, включает чётко сформулированную

		<p>постановку задачи, грамотно составленный алгоритм и аккуратное оформление результатов. Работа выполнена самостоятельно, показывает глубокое понимание методики решения и умение оценить полученные результаты.</p>
4	Хорошо	<p>Основная часть задания выполнена верно, имеются небольшие ошибки или недочёты в оформлении отчёта либо незначительные проблемы с интерпретацией полученных результатов. Обнаружены отдельные недостатки в формулировании постановки задачи или выполнении отдельных шагов алгоритма, однако студент способен сам выявить и исправить указанные недостатки.</p>
3	Удовлетворительно	<p>Задача частично решена неверно или выполнены лишь некоторые этапы алгоритма. Есть значительные затруднения в выборе правильной методики решения, допущены серьёзные ошибки в расчётах или обработке результатов. Понимание общей концепции ограничено, отчёт составлен недостаточно подробно, возможно наличие значительных пробелов в изложении хода исследования.</p>
2	Неудовлетворительно	<p>Студентом не продемонстрированы необходимые базовые знания и умения. Алгоритм выбран неправильно, расчеты проведены некорректно, задание практически не выполнено. Результаты анализа отсутствуют или сделаны поверхностно, график отсутствует или плохо интерпретирован. Качество оформления отчета низкое, большое количество ошибок и отсутствие попыток исправлений.</p>

Тема практической работы № 20. Применение численных методов для решения краевых задач в задачах моделирования, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование практических навыков решения прикладных задач, включающих применение численных методов для нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений второго порядка с краевыми условиями.

Задания:

Задание 1. Теоретическое:

Изучить теоретический материал по теме лекции, подготовленной преподавателем ранее.

Контрольные вопросы:

Что такое краевые условия?

Какова основная идея метода конечных разностей?

Какие виды сеточных схем используются для аппроксимации производных?

Подготовить конспект основных положений теории и записать формулы конечно-разностных аналогов первой и второй производных.

Задание 2. Практическое: решение задач:

Задача 1. Метод конечных разностей

Решите следующее линейное уравнение с граничными условиями, используя метод конечных разностей:

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Используйте равномерную сетку с числом узлов $N=8$.

Отчет должен содержать описание процедуры построения сетки, расчет значений функций на узлах сетки, построенную таблицу результатов и график полученного решения.

Задача 2. Программная реализация

Реализовать метод конечных разностей в среде Python или MATLAB для следующей краевой задачи:

$$y'' - xy' + y^2 = e^{-x}, y(-1) = 0, y(1) = 1.$$

Напишите программу, позволяющую варьировать число узлов сетки и выводить графики полученных решений.

Подготовьте отчет, содержащий код программы, таблицы расчетов и графические иллюстрации.

Форма отчетности:

Отчеты предоставляются индивидуально в письменном виде либо электронно (формат PDF).

Критерии оценки качества выполнения заданий:

Уровень освоения	Оценка
Полностью выполнено задание, соблюдены сроки сдачи отчета, правильно использованы инструменты, программа написана грамотно и эффективно работает	Отлично
Выполнено большинство пунктов задания, допущены незначительные ошибки в расчетах или программе, отчеты содержат отдельные недостатки	Хорошо
Частично выполнены пункты задания, имеются значительные ошибки в расчетах или неверно выбран метод, качество программного кода низкое	Удовлетворительно
Работа выполнена формально, отсутствует понимание материала, использование неверных методик или полное отсутствие результата	Неудовлетворительно

Тема практической работы № 21. Реализация метода градиентного спуска для оптимизации функций, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование у обучающихся компетенций по применению метода градиентного спуска для минимизации функционалов и оптимизационных задач.

Задания:

Задание 1. Теоретическое:

1. Обзор целей и задач занятия.
2. Краткий повтор материала предыдущего занятия.
3. Демонстрация пошагового примера расчёта градиента и движения вдоль направления убывания целевой функции.

Задание 2. Практическое:

Выполнение студентами двух типов упражнений:

Упражнение 1. Оптимизация квадратичной функции вручную

Оптимизировать функцию вида $f(x)=ax^2+bx+c$ методом градиентного спуска. Подберите оптимальное значение шага α , найдите минимум функции и проверьте правильность полученного результата аналитически.

Вычисления провести вручную на бумаге и представить преподавателю.

Упражнение 2. Автоматизированная реализация метода градиентного спуска

Создать простую программу на Python, реализующую метод градиентного спуска для произвольной гладкой функции одной переменной. Программа должна иметь следующий функционал:

- Запрашивать исходные данные (начальное приближение, коэффициент шага).
- Проводить итерации градиентного спуска до достижения заданной точности.
- Показывать изменение значения функции и точки минимума после каждой итерации.

Пример оптимальной функции для тренировки: $f(x)=x^4-3x^3+2$.

Программа должна сохранять шаги процесса оптимизации в файле формата CSV для дальнейшего анализа.

Требования к оформлению итоговых работ:

Отчёт студента включает:

Решение упражнения №1 в рукописном виде с подробными пояснениями.

Листинг программы, выполненный на компьютере.

Графики зависимости целевой функции от количества итераций.

Выводы о работе метода градиентного спуска и эффективности подбора коэффициента шага.

Критерии оценки:

Уровень освоения	Оценка
-------------------------	---------------

Полностью выполнено задание, соблюден порядок представления этапов и форматов отчётности, продемонстрировано хорошее понимание принципов метода градиентного спуска	Отлично
Выполнено большинство требований, возможны небольшие погрешности в представлении хода рассуждений, наличие несущественных ошибок в программе	Хорошо
Основные требования выполнены частично, присутствуют существенные ошибки в расчете градиента или подборе шага, структура отчёта нарушена	Удовлетворительно
Большая часть задания не выполнена, методика реализована неправильно, логика решения существенно искажена	Неудовлетворительно

Тема практической работы № 22. Применение стохастического градиентного спуска для больших наборов данных, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - освоение обучающимися методики применения стохастического градиентного спуска (SGD) для ускорения оптимизации целевых функций на больших объемах данных.

Задания:

Задание 1. Теоретическое:

1. Повторение основного материала: градиентный спуск и проблемы масштабирования на большие объемы данных.
2. Объяснение идеи стохастического градиентного спуска и отличия от классического градиентного спуска.
3. Анализ влияния параметра batch size и learning rate на скорость и точность оптимизации.

Задание 2. Практическое:

Задание выполняется коллективно группами по 2-3 человека, каждая группа получает доступ к общему датасету для выполнения эксперимента.

Практическое упражнение №1. Реализация стохастического градиентного спуска вручную

Определите минимум функции $f(\theta) = (\theta - 2)^2$, используя метод стохастического градиентного спуска. Возьмите случайные выборки размером 10 элементов из массива из 100 точек равномерно распределённых на интервале $[0,4]$ и оцените среднее значение шага обновления веса θ . Проведите три этапа обновления и покажите процесс вручную.

Представьте ход вычислений в виде таблиц и сравните полученный результат с результатом обычного градиентного спуска.

Практическое упражнение №2. Программная реализация стохастического градиентного спуска

Разработать простейшую реализацию метода стохастического градиентного спуска на Python для следующей функции регрессии:

$$J(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (wX_i - Y_i)^2$$

где X и Y — массивы чисел, представляющие большой набор данных ($n > 1000$). Используйте библиотеку NumPy для генерации данных и обработки матриц.

Параметры настройки модели:

- Размер пакета данных (batch size): 32, 64, 128.
- Скорость обучения (learning rate): 0.01, 0.001, 0.0001.

Оцените влияние разных размеров пакетов и скоростей обучения на скорость сходимости и стабильность процесса оптимизации.

Итоговая форма отчетности:

- Каждый студент представляет следующую документацию:
- Отчёт о выполнении задания №1 (таблицы и выводы).
- Листинг программы с комментариями, демонстрирующий процедуру SGD и вывод графика сходимости для различных настроек.
- Ответы на контрольные вопросы:

Чем отличается классический градиентный спуск от стохастического?

Почему выбор правильного размера пакета важен для эффективной работы SGD?

Критерии оценки:

Уровень освоения	Оценка
Полностью выполнено задание, проведен грамотный анализ результатов, представлена качественная документация и полный листинг программы	Отлично
Основное задание выполнено, однако присутствуют некоторые мелкие ошибки в анализе или документации	Хорошо
Основная часть задания выполнена неудовлетворительно, серьезные ошибки в понимании и применении метода	Удовлетворительно
Отсутствие понимания темы, низкая активность на занятии, невыполнение большинства задач	Неудовлетворительно

Тема практической работы № 23. Применение метода Ньютона для оптимизации многомерных функций, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - формирование у обучающихся навыков использования метода Ньютона для поиска экстремума многомерных функций и закрепление умений работы с матрицами Гессе и векторами градиентов.

Задания:

Задание 1. Теоретическое:

- Повторение материалов лекции: основы численных методов оптимизации, понятие локальных экстремумов, роль градиента и матрицы Гессе.
- Обучение методу Ньютона для многомерных функций, включая принцип формирования направлений поиска экстремума и остановку итерационного процесса.
- Примеры упрощенного применения метода Ньютона на простейших функциях.

Задание 2. Практическое:

Выполнить два типа практических упражнений:

Практическое упражнение №1. Нахождение локального минимума вручную

Рассмотрите функцию:

$$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2-6x-2y$$

Для неё вручную рассчитайте:

- Первый и второй частные производные.
- Матрицу Гессе и её обратную.
- Найдите точку локального минимума, применяя метод Ньютона.

Проверьте найденный результат аналитически.

Практическое упражнение №2. Компьютерная реализация метода Ньютона

Разработайте программу на Python, решающую задачу оптимизации функции:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xyz$$

Необходимо реализовать следующие этапы:

- Расчёт градиента и матрицы Гессе.
- Реализацию самого метода Ньютона с заданием начального приближения (x_0, y_0, z_0) .
- Проверку условий остановки процесса (малого сдвига координат или малого уменьшения функции).

Привести программу и результаты оптимизации в форме отчётного файла.

Формы контроля и оценка выполнения заданий:

Итоговая форма отчетности каждого студента состоит из:

- Выполнения упражнения №1 с оформлением полного решения на бумажном носителе.
- Предоставления программного кода и результатов компьютерного решения упражнения №2.

Критерии оценки:

Уровень освоения	Оценка
Студент демонстрирует глубокое понимание метода Ньютона, справился с обоими заданиями, представленные расчеты верны, код написан	Отлично

качественно и подробно прокомментирован	
Учащийся справился с основной частью задания, сделаны необходимые расчеты, но присутствует ряд мелких недостатков в оформлении отчета или программировании	Хорошо
Основной объём задания выполнен, однако заметны серьёзные просчёты в правильности применения метода или в программном коде	Удовлетворительно
Значительная часть задания не выполнена, студент показывает недостаточное знание материала	Неудовлетворительно

Тема практической работы № 24. Оптимизация многомерных функций с ограничениями, объем часов 2.

У1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

У2 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии

У3 Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности

У4 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

У5 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации

У6 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение

У7 Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

У8 Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья

У9 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Цель практической работы - обучение студентов эффективным способам решения задач оптимизации с ограничениями посредством постановки и решения реальных практических примеров.

Задания:

Задания выполняются индивидуально или небольшими группами по выбору преподавателя.

Практическое упражнение №1. Постановка и решение задачи условной оптимизации вручную

Рассмотреть следующую задачу:

Минимизировать функцию $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y = 1$.

Примените метод множителей Лагранжа для нахождения глобального минимума функции.

Оформите решение вручную на бумаге, укажите расчёт всех необходимых частных производных и корней уравнений.

Практическое упражнение №2. Компьютерная реализация решения задачи условной оптимизации

Решите следующую задачу с использованием Python и библиотеки SciPy:

Максимизировать функцию $f(x,y,z)=x \cdot y \cdot z$ при ограничениях: $x+y+z=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Реализуйте соответствующую программу на Python, используя модуль `scipy.optimize` для численного решения задачи. Докажите правильность своего решения, сравнив результаты численного подхода с ручным решением аналогичной задачи.

Формы контроля и отчётности:

Форма отчётности включает:

- Подробно выполненные решения обеих задач в письменной форме.
- Код программы на Python с результатами выполнения.
- Выводы о результатах исследования.

Критерии оценки:

Уровень освоения	Оценка
Обе задачи решены верно, представлен качественный и хорошо документированный программный код, имеется детальная аргументация выводов	Отлично
Одна из задач выполнена полностью, вторая имеет лишь частичное решение, оформление удовлетворительное	Хорошо
Лишь одна из задач доведена до конца, наблюдается значительная путаница в используемых инструментах или методах	Удовлетворительно
Ни одно из заданий не решено или представлено крайне некачественно	Неудовлетворительно

Практическое упражнение № 3. Задача максимизации прибыли предприятия при наличии технологических ограничений производства.

Для решения используйте возможности символьных вычислений Python (`sympy`) и библиотеки `scipy`:

Постановка задачи:

Предположим, предприятие производит продукцию трёх видов: А, В и С. Производство продукции требует затрат ресурсов и приносит прибыль. Необходимо определить объёмы выпуска продукции каждого вида таким

образом, чтобы обеспечить максимальную прибыль при соблюдении производственных ограничений.

Исходные данные:

Прибыль от единицы продукции А составляет 10 единиц, продукция В приносит 15 единиц прибыли, продукция С даёт 20 единиц прибыли.

Ограничения на производственные мощности:

- Всего доступно 100 единиц ресурса X (необходим для производства всех товаров);
- Ресурс Y ограничен 150 единицами (также необходим для производства всех товаров).

Нормы расхода ресурсов на производство единицы товара:

- Продукция А потребляет 2 ед. ресурса X и 3 ед. ресурса Y;
- Продукция В расходует 3 ед. ресурса X и 2 ед. ресурса Y;
- Продукция С тратит 4 ед. ресурса X и 1 ед. ресурса Y.

Кроме того, существуют дополнительные технологические ограничения:

- Общий выпуск продукции не должен превышать 50 единиц.
- Выпуск каждого продукта не менее нуля ($A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$).

Формулировка задачи:

Требуется найти максимальное значение общей прибыли $P(A,B,C)$ при указанных ресурсах и технологиях:

$$\text{maximize } P(A,B,C)=10A+15B+20C$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2A + 3B + 4C \leq 100 \\ 3A + 2B + C \leq 150 \\ A + B + C \leq 50 \\ A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0 \end{cases}$$

Метод решения:

Используя библиотеку `scipy`, необходимо применить встроенные функции для численного решения задачи условной оптимизации. Например, воспользоваться функцией `minimize` с указанием соответствующих ограничений.

Этапы выполнения:

1. Определите функцию цели и функции ограничений.
2. Преобразуйте задачу максимизации в эквивалентную задачу минимизации путём умножения функции цели на минус единицу.
3. Задайте начальные приближения для объемов выпуска продуктов.
4. Напишите программу на Python, которая решает данную задачу с использованием соответствующего инструмента из библиотеки `scipy`.
5. Проанализируйте результаты, обеспечив проверку условий работоспособности полученной комбинации выпуска.

Результатом выполнения является:

- Распечатанный код программы с описанием введённых ограничений и начальных условий.

- Таблица результатов оптимизации с выведенным оптимальным объемом производства каждого вида продукции.
- Короткая пояснительная записка с выводами относительно целесообразности такого распределения ресурсов.

Критерии оценки:

«5» (отлично) ставится, если студент выполнил задачу идеально или почти идеально, проявил высокий уровень самостоятельности и творческого подхода, предоставил правильное решение, сделал грамотные выводы и аккуратно оформил работу.

«4» (хорошо) присваивается, если основная часть задачи выполнена правильно, хотя допускаются незначительные ошибки или несовершенства в некоторых аспектах (например, небольшом нарушении структуры отчета или наличия небольших погрешностей в комментариях к коду).

«3» (удовлетворительно) выставляется, если работа выполнена с большими ошибками или значительной нехваткой деталей, но при этом общее понимание задачи сохраняется и видна попытка исправить ситуацию.

«2» (неудовлетворительно) ставится, если задание выполнено недостаточно полно, ошибки значительны и приводят к неправильному результату, либо отсутствуют важные элементы (например, объяснения, выводы или программный код).

II. Общие рекомендации

По всем вопросам, связанным с изучением дисциплины (включая самостоятельную работу), консультироваться с преподавателем.